Sage 快速参考:
基本数论

William Stein

Sage Version 3.4

http://wiki.sagemath.org/quickref

文中 m,n,a,b 等均为 `ZZ` 中元素

`ZZ` = $\mathbf{Z}$ = 所有整数

整数

$$\ldots,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots$$

n 被 m 除的余数 `n % m`

`gcd(n,m)`, `gcd(`*list*`)`

扩展 gcd $g=sa+tb=\gcd(a,b)$: `g,s,t=xgcd(a,b)`

`lcm(n,m)`, `lcm(`*list*`)`

二项式系数 $\binom{m}{n}$ = `binomial(m,n)`

数值按进制展开: `n.digits(`*base*`)`

数值按进制展开的位数: `n.ndigits(`*base*`)`

(基 是可选项, 默认为 10)

整除 $n \mid m$: `n.divides(m)` 若 $nk=m$ 对于某 k

约数 – 所有满足 $d \mid n$ 的 d: `n.divisors()`

阶乘 – $n!$ = `n.factorial()`

素数

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,\ldots$$

素因数分解: `factor(n)`

素数检验: `is_prime(n)`, `is_pseudoprime(n)`

素幂检验: `is_prime_power(n)`

$\pi(x)=\#\{p : p\le x$ 为素数$\}$ = `prime_pi(x)`

素数集合: `Primes()`

$\{p : m\le p<n$ 且 p 为素数$\}$ =`prime_range(m,n)`

素数幂: `prime_powers(m,n)`

前 n 个素数: `primes_first_n(n)`

后一个素数与前一个素数: `next_prime(n)`, `previous_prime(n)`, `next_probable_prime(n)`

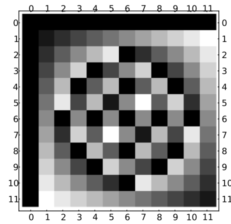
后一个与前一个素数幂: `next_prime_power(n)`, `pevious_prime_power(n)`

2^p-1 的 Lucas-Lehmer 素性检验

```
def is_prime_lucas_lehmer(p):
    s = Mod(4, 2^p - 1)
    for i in range(3, p+1): s = s^2 - 2
    return s == 0
```

模算术与同余

`k=12; m = matrix(ZZ, k, [(i*j)%k for i in [0..k-1] for j in [0..k-1]]); m.plot(cmap='gray')`



欧拉 $\phi(n)$ 函数: `euler_phi(n)`

Kronecker 符号 $\left(\frac{a}{b}\right)$ = `kronecker_symbol(a,b)`

二次剩余: `quadratic_residues(n)`

二次非剩余: `quadratic_residues(n)`

环 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ = `Zmod(n)` = `IntegerModRing(n)`

a 模 n 视为 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 中的元素: `Mod(a, n)`

模 n 的本原根 = `primitive_root(n)`

$n \pmod m$ 的逆: `n.inverse_mod(m)`

乘方 $a^n \pmod m$: `power_mod(a, n, m)`

中国剩余定理: `x = crt(a,b,m,n)`

寻找 x 满足 $x\equiv a \pmod m$ 且 $x \equiv b \pmod n$

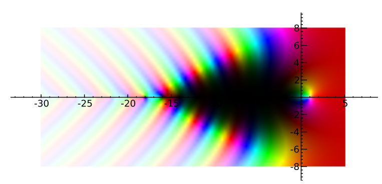
离散对数: `log(Mod(6,7), Mod(3,7))`

$a \pmod n$ 的阶 =`Mod(a,n).multiplicative_order()`

$a \pmod n$ 的平方根 =`Mod(a,n).sqrt()`

特殊函数

`complex_plot(zeta, (-30,5), (-8,8))`



$\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}=\sum \frac{1}{n^s}$ = `zeta(s)`

$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x \frac{1}{\log(t)}dt$ = `Li(x)`

$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ = `gamma(s)`

连分数

`continued_fraction(pi)`

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cdots}}}}$$

连分数: `c=continued_fraction(x,` *bits*`)`

近似分数: `c.convergents()`

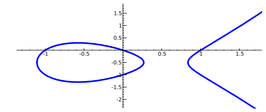
部分分子 p_n = `c.pn(n)`

部分分母 q_n = `c.qn(n)`

值: `c.value()`

椭圆曲线

`EllipticCurve([0,0,1,-1,0]).plot(plot_points=300,thickness=3)`



`E = EllipticCurve(`$[a_1,a_2,a_3,a_4,a_6]$`)`

$$y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$$

E 的导子 N =`E.conductor()`

E 的判别式 Δ =`E.discriminant()`

E 的秩 = `E.rank()`

$E(\mathbf{Q})$ 的自由生成系 = `E.gens()`

j-不变量 = `E.j_invariant()`

$N_p=\#\{E$ 模 p 的解$\}$ = `E.Np(`*prime*`)`

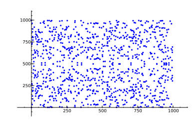
$a_p=p+1-N_p$ =`E.ap(`*prime*`)`

$L(E,s)=\sum \frac{a_n}{n^s}$ = `E.lseries()`

$\mathrm{ord}_{s=1}L(E,s)$ = `E.analytic_rank()`

模 p 椭圆曲线

`EllipticCurve(GF(997), [0,0,1,-1,0]).plot()`



`E = EllipticCurve(GF(p),` $[a_1,a_2,a_3,a_4,a_6]$`)`

$\#E(\mathbf{F}_p)$ = `E.cardinality()`

$E(\mathbf{F}_p)$ 的生成系 = `E.gens()`

$E(\mathbf{F}_p)$ =`E.points()`