IUT d'Orsay
Département Informatique
Mathématiques

2011-2012
DUT 1A

Interrogation du jeudi 24 novembre 2011 (Sujet B)

Exercice 1. *On considère les matrices A et B :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA lorsque cela est possible :

```
sage : A * B if A.ncols() == B.nrows() else None
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 8 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

```
sage : B * A if B.ncols() == A.nrows() else None
```

Exercice 2. *Soit A la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} a^i & a^n \end{pmatrix}$$

Initialisation : la formule est valide pour $n = 0, 1, 2, 3$:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+1 & a^2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^2+a+1 & a^3 \end{pmatrix}$$

Soit n un entier et supposons que la formule soit valide :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} a^i & a^n \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} a^i & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^i & a^n a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n} a^i & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

et donc la formule reste valide pour $n+1$, comme voulu.

2. *Calculer* $\sum_{i=0}^{n-1} a^i$ *en fonction de* a *et* n *:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

3. *En déduire* A^n *lorsque* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} & 3^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Soient* $f_1 : E \to F$ *et* $f_2 : F \to G$ *deux fonctions.*

1. *Rappeler les définitions de :*
   (a) $f_2 \circ f_1$ *:*
   $f_2 \circ f_1$ *est la fonction de* E *dans* G *définie par* $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$.

   (b) f_1 *est surjective :*
   f_1 *est surjective si* $\forall y \in E, \exists x \in E, f_1(x) = y$

2. *Démontrer que si* f_1 *et* f_2 *sont injectives alors* $f_2 \circ f_1$ *l'est aussi.*
   Supposons en effet que f_1 *et* f_2 *sont injectives.*
   Soient x *et* x' *dans* E *tels que* $(f_2 \circ f_1)(x) = (f_2 \circ f_1)(x')$*, c'est-à-dire :*

$$f_2(f_1(x)) = f_2(f_1(x')) .$$

   Comme f_2 *est injective, on en déduit que* $f_1(x) = f_1(x')$.
   Comme f_1 *est injective, on en déduit que* $x = x'$.
   Conclusion $f_2 \circ f_1$ *est injective.*

Exercice 4. *Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels avec $b \neq 0$. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ si $a\, b' = a'\, b$.*

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

   (a) *$\mathcal{R}$ est **réflexive** : soit (a, b) dans E ; on a $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$ car $a\, b = a\, b$.*

   (b) *$\mathcal{R}$ est **symétrique** : soient (a, b) et (a', b') dans E ; alors on a :*

   $$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \iff a\, b' = a'\, b \iff a'\, b = a\, b' \iff (a', b')\mathcal{R}(a, b)\,.$$

   (c) *$\mathcal{R}$ est **transitive** : soient (a, b), (a', b') et (a'', b'') dans E tels que $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ et $(a', b')\mathcal{R}(a'', b'')$:*

   $$a\, b' = a'\, b \qquad \text{et} \qquad a'\, b'' = a''\, b'\,.$$

   En multipliant par b'' la première équation et en multipliant par b la deuxième équation on obtient :

   $$a\, b'\, b'' = a'\, b\, b'' = a''\, b'\, b\,.$$

   En simplifiant par b' (qui est non nul), on en déduit que :

   $$a\, b'' = a''\, b\,.$$

   Donc $(a, b)\mathcal{R}(a'', b'')$ comme voulu.

   Conclusion $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. *Donner les classes d'équivalences de $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(3, 2)$:*

$$\overline{(1,1)} = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\} = \{(k,k), k \in \mathbb{N}\}$$
$$\overline{(2,1)} = \{(2,1), (4,2), (6,3), \dots\} = \{(2k,k), k \in \mathbb{N}\}$$
$$\overline{(3,2)} = \{(3,2), (6,4), (9,6), \dots\} = \{(3k,2k), k \in \mathbb{N}\}$$

C'est cette relation d'équivalence qui permet de construire l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels à partir des entiers naturels : chaque entier relatif est décrit implicitement comme fraction a/b de deux entiers naturels, sachant qu'il y a plusieurs manières de choisir a et b. Ainsi, les classes d'équivalences de $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(3, 2)$ donnent respectivement les nombres rationnels 1, 2 et $3/2$.

3. *(Optionnel)*
   Montrer que si $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ *et* $(c,d)\mathcal{R}(c',d')$ *alors* $(a\,c, b\,d)\mathcal{R}(a'\,c', b'\,d')$.
   C'est cette propriété qui permet de définir la multiplication sur $\mathbb{Q}$ à partir de la multiplication sur $\mathbb{N}$.