IUT d'Orsay 2011-2012
Département Informatique DUT 1A
Mathématiques

Interrogation du jeudi 24 novembre 2011 (Sujet D)

Exercice 1. *On considère les matrices A et B :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA lorsque cela est possible :

Exercice 2. *Soit A la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \sum_{i=0}^{n-1} a^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Calculer* $\sum_{i=0}^{n-1} a^i$ *en fonction de* a *et* n *:*

3. *En déduire* A^n *lorsque* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *:*

Exercice 3. *Soient* $g_1 : E \to F$ *et* $g_2 : F \to G$ *deux fonctions.*

1. *Rappeler les définitions de :*
   (a) $g_2 \circ g_1$ *:*

   (b) g_1 *est surjective :*

2. *Démontrer que si* g_1 *et* g_2 *sont injectives alors* $g_2 \circ g_1$ *l'est aussi.*

Exercice 4. *Soit $E = \mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ si $a + b' = a' + b$.*

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

2. *Donner les classes d'équivalences de $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$:*

C'est cette relation d'équivalence qui permet de construire l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs à partir des entiers naturels : chaque entier relatif est décrit implicitement comme différence $a - b$ de deux entiers naturels, sachant qu'il y a plusieurs manières de choisir a et b. Ainsi, les classes d'équivalences de $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ donnent respectivement les entiers relatifs 0, 1 et -1.

3. *(Optionnel)*
   Montrer que si $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ *et* $(c,d)\mathcal{R}(c',d')$ *alors* $(a+c,b+d)\mathcal{R}(a'+c',b'+d')$.
   C'est cette propriété qui permet de définir l'addition sur $\mathbb{Z}$ à partir de l'addition sur $\mathbb{N}$.