IUT d'Orsay | 2011-2012
Département Informatique | DUT 1A
Mathématiques

Interrogation du jeudi 24 novembre 2011 (Sujet B)

Exercice 1. *On considère les matrices A et B :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA lorsque cela est possible :

Exercice 2. *Soit A la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} a^i & a^n \end{pmatrix}$$

2. *Calculer* $\sum_{i=0}^{n-1} a^i$ *en fonction de* a *et* n *:*

3. *En déduire* A^n *lorsque* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *:*

Exercice 3. *Soient* $f_1 : E \to F$ *et* $f_2 : F \to G$ *deux fonctions.*

1. *Rappeler les définitions de :*
   (a) $f_2 \circ f_1$ *:*

   (b) f_1 *est surjective :*

2. *Démontrer que si* f_1 *et* f_2 *sont injectives alors* $f_2 \circ f_1$ *l'est aussi.*

Exercice 4. *Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels avec $b \neq 0$. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ si $a\,b' = a'\,b$.*

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

2. *Donner les classes d'équivalences de $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(3, 2)$:*

C'est cette relation d'équivalence qui permet de construire l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels à partir des entiers naturels : chaque entier relatif est décrit implicitement comme fraction a/b de deux entiers naturels, sachant qu'il y a plusieurs manières de choisir a et b. Ainsi, les classes d'équivalences de $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(3, 2)$ donnent respectivement les nombres rationnels 1, 2 et $3/2$.

3. *(Optionnel)*
   Montrer que si $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ *et* $(c, d)\mathcal{R}(c', d')$ *alors* $(a\,c, b\,d)\mathcal{R}(a'\,c', b'\,d')$.
   C'est cette propriété qui permet de définir la multiplication sur $\mathbb{Q}$ à partir de la multiplication sur $\mathbb{N}$.