IUT d'Orsay
Département Informatique
Mathématiques

2011-2012
DUT 1A

Interrogation du jeudi 24 novembre 2011 (Sujet C)

Exercice 1. *On considère les matrices A et B :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA lorsque cela est possible :

```
sage : A * B if A.ncols() == B.nrows() else None
sage : B * A if B.ncols() == A.nrows() else None
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *Soit A la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} b^n & \sum_{i=0}^{n-1} b^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Initialisation : la formule est valide pour $n = 0, 1, 2, 3$:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^1 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} b^2 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} b^3 & b^2+b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit n un entier et supposons que la formule soit valide :

$$A^n = \begin{pmatrix} b^n & \sum_{i=0}^{n-1} b^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} b^n & \sum_{i=0}^{n-1} b^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^n b & b^n + \sum_{i=0}^{n-1} b^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{n+1} & \sum_{i=0}^{n} b^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc la formule reste valide pour $n + 1$, comme voulu.

2. *Calculer* $\sum_{i=0}^{n-1} b^i$ *en fonction de* b *et* n *:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} b^i = \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

3. *En déduire* A^n *lorsque* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Soient* $g_1 : E \to F$ *et* $g_2 : F \to G$ *deux fonctions.*

1. *Rappeler les définitions de :*
   (a) $g_2 \circ g_1$ *:*
   $g_2 \circ g_1$ *est la fonction de* E *dans* G *définie par* $(g_2 \circ g_1)(x) = g_2(g_1(x))$.

   (b) g_1 *est injective :*
   g_1 *est injective si* $\forall x \in E, \forall x' \in E, g_1(x) = g_1(x') \implies x = x'$

2. *Démontrer que si* g_1 *et* g_2 *sont surjectives alors* $g_2 \circ g_1$ *l'est aussi.*
   Supposons en effet que g_1 *et* g_2 *sont surjectives, et soit* $z \in G$.
   Comme g_2 *est surjective, on peut prendre* y *dans* F *tel que* $g_2(y) = z$.
   Comme g_1 *est surjective, on peut prendre* x *dans* E *tel que* $g_1(x) = y$.
   Alors, x *est un antécédent de* z *:* $g_2 \circ g_1(x) = g_2(g_1(x)) = z$.
   Conclusion $g_2 \circ g_1$ *est surjective.*

Exercice 4. *Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ l'ensemble des couples (n, m) d'entiers naturels avec $m \neq 0$. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$ si $n\,m' = n'\,m$.*

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

   (a) *$\mathcal{R}$ est **réflexive** : soit (n, m) dans E ; on a $(n, m)\mathcal{R}(n, m)$ car $n\,m = n\,m$.*

   (b) *$\mathcal{R}$ est **symétrique** : soient (n, m) et (n', m') dans E ; alors on a :*

   $$(n, m)\mathcal{R}(n', m') \iff n\,m' = n'\,m \iff n'\,m = n\,m' \iff (n', m')\mathcal{R}(n, m)\,.$$

   (c) *$\mathcal{R}$ est **transitive** : soient (n, m), (n', m') et (n'', m'') dans E tels que $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$ et $(n', m')\mathcal{R}(n'', m'')$:*

   $$n\,m' = n'\,m \qquad \text{et} \qquad n'\,m'' = n''\,m'\,.$$

   En multipliant par m'' la première équation et en multipliant par m la deuxième équation on obtient :

   $$n\,m'\,m'' = n'\,m\,m'' = n''\,m'\,m\,.$$

   En simplifiant par m' (qui est non nul), on en déduit que :

   $$n\,m'' = n''\,m\,.$$

   Donc $(n, m)\mathcal{R}(n'', m'')$ comme voulu.

   Conclusion $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. *Donner les classes d'équivalences de $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(3, 2)$:*

$$\begin{aligned}
\overline{(1,1)} &= \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\} = \{(k,k), k \in \mathbb{N}\} \\
\overline{(2,1)} &= \{(2,1), (4,2), (6,3), \dots\} = \{(2k,k), k \in \mathbb{N}\} \\
\overline{(3,2)} &= \{(3,2), (6,4), (9,6), \dots\} = \{(3k,2k), k \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

C'est cette relation d'équivalence qui permet de construire l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels à partir des entiers naturels : chaque entier relatif est décrit implicitement comme fraction n/m de deux entiers naturels, sachant qu'il y a plusieurs manières de choisir n et m. Ainsi, les classes d'équivalences de $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(3, 2)$ donnent respectivement les nombres rationnels 1, 2 et $3/2$.

3. *(Optionnel)*
   Montrer que si $(n,m)\mathcal{R}(n',m')$ *et* $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ *alors* $(n\,p, m\,q)\mathcal{R}(n'\,p', m'\,q')$.
   C'est cette propriété qui permet de définir la multiplication sur $\mathbb{Q}$ à partir de la multiplication sur $\mathbb{N}$.