IUT d'Orsay 2011-2012
Département Informatique DUT 1A
Mathématiques

Interrogation du jeudi 24 novembre 2011 (Sujet A)

Exercice 1. *On considère les matrices A et B :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA lorsque cela est possible :

```
sage : A * B if A.ncols() == B.nrows() else None
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
sage : B * A if B.ncols() == A.nrows() else None
```

Exercice 2. *Soit A la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} b^i & b^n \end{pmatrix}$$

Initialisation : la formule est valide pour $n = 0, 1, 2, 3$:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b+1 & b^2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b^2+b+1 & b^3 \end{pmatrix}$$

Soit n un entier et supposons que la formule soit valide :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} b^i & b^n \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} b^i & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b^n + \sum_{i=0}^{n-1} b^i & b^n b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{n} b^i & b^{n+1} \end{pmatrix}$$

et donc la formule reste valide pour $n+1$, comme voulu.

2. *Calculer* $\sum_{i=0}^{n-1} b^i$ *en fonction de* b *et* n *:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} b^i = \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

3. *En déduire* A^n *lorsque* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Soient* $f_1 : E \to F$ *et* $f_2 : F \to G$ *deux fonctions.*

1. *Rappeler les définitions de :*
   (a) $f_2 \circ f_1$ *:*
   $f_2 \circ f_1$ *est la fonction de* E *dans* G *définie par* $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$.

   (b) f_1 *est injective :*
   f_1 *est injective si* $\forall x \in E, \forall x' \in E, f_1(x) = f_1(x') \implies x = x'$

2. *Démontrer que si* f_1 *et* f_2 *sont surjectives alors* $f_2 \circ f_1$ *l'est aussi.*
   Supposons en effet que f_1 *et* f_2 *sont surjectives, et soit* $z \in G$.
   Comme f_2 *est surjective, on peut prendre* y *dans* F *tel que* $f_2(y) = z$.
   Comme f_1 *est surjective, on peut prendre* x *dans* E *tel que* $f_1(x) = y$.
   Alors, x *est un antécédent de* z *:* $f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = z$.
   Conclusion $f_2 \circ f_1$ *est surjective.*

Exercice 4. *Soit* $E = \mathbb{N}^2$ *l'ensemble des couples* (n, m) *d'entiers naturels. On définit la relation* $\mathcal{R}$ *sur* E *par :* $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$ *si* $n + m' = n' + m$*.*

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

   (a) *$\mathcal{R}$ est **réflexive** : soit (n, m) dans E ; on a $(n, m)\mathcal{R}(n, m)$ car $n + m = n + m$.*

   (b) *$\mathcal{R}$ est **symétrique** : soient (n, m) et (n', m') dans E ; alors on a :*

   $$(n, m)\mathcal{R}(n', m') \iff n+m' = n'+m \iff n'+m = n+m' \iff (n', m')\mathcal{R}(n, m)\,.$$

   (c) *$\mathcal{R}$ est **transitive** : soient (n, m), (n', m') et (n'', m'') dans E tels que $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$ et $(n', m')\mathcal{R}(n'', m'')$:*

   $$n + m' = n' + m \qquad \text{et} \qquad n' + m'' = n'' + m'\,.$$

   En ajoutant m'' à la première équation et en ajoutant m à la deuxième équation on obtient :

   $$n + m' + m'' = n' + m + m'' = n'' + m' + m\,.$$

   En simplifiant par m' , on en déduit que :

   $$n + m'' = n'' + m\,.$$

   Donc $(n, m)\mathcal{R}(n'', m'')$ comme voulu.

   Conclusion $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. *Donner les classes d'équivalences de* $(0, 0)$*,* $(1, 0)$ *et* $(0, 1)$ *:*

   $$\begin{aligned}
   \overline{(0,0)} &= \{(0,0),(1,1),(2,2),\dots\} = \{(k,k), k \in \mathbb{N}\}\\
   \overline{(1,0)} &= \{(1,0),(2,1),(3,2),\dots\} = \{(k+1,k), k \in \mathbb{N}\}\\
   \overline{(0,1)} &= \{(0,1),(1,2),(2,3),\dots\} = \{(k,k+1), k \in \mathbb{N}\}
   \end{aligned}$$

C'est cette relation d'équivalence qui permet de construire l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs à partir des entiers naturels : chaque entier relatif est décrit implicitement comme différence $n - m$ de deux entiers naturels, sachant qu'il y a plusieurs manières de choisir n et m. Ainsi, les classes d'équivalences de $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ donnent respectivement les entiers relatifs 0, 1 et -1.

3. *(Optionnel)*
   Montrer que si $(n,m)\mathcal{R}(n',m')$ *et* $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ *alors* $(n+p,m+q)\mathcal{R}(n'+p',m'+q')$.
   C'est cette propriété qui permet de définir l'addition sur $\mathbb{Z}$ à partir de l'addition sur $\mathbb{N}$.