IUT d'Orsay
Département Informatique
Mathématiques

2011-2012
DUT 1A

Interrogation du jeudi 24 novembre 2011 (Sujet C)

Exercice 1. *On considère les matrices A et B :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA lorsque cela est possible :

Exercice 2. *Soit A la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} b^n & \sum_{i=0}^{n-1} b^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Calculer* $\sum_{i=0}^{n-1} b^i$ *en fonction de* b *et* n *:*

3. *En déduire* A^n *lorsque* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *:*

Exercice 3. *Soient* $g_1 : E \to F$ *et* $g_2 : F \to G$ *deux fonctions.*

1. *Rappeler les définitions de :*
   (a) $g_2 \circ g_1$ *:*

   (b) g_1 *est injective :*

2. *Démontrer que si* g_1 *et* g_2 *sont surjectives alors* $g_2 \circ g_1$ *l'est aussi.*

Exercice 4. *Soit* $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *l'ensemble des couples* (n, m) *d'entiers naturels avec* $m \neq 0$*. On définit la relation* $\mathcal{R}$ *sur* E *par :* $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$ *si* $n\,m' = n'\,m$*.*

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

2. *Donner les classes d'équivalences de* $(1, 1)$*,* $(2, 1)$ *et* $(3, 2)$ *:*

C'est cette relation d'équivalence qui permet de construire l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels à partir des entiers naturels : chaque entier relatif est décrit implicitement comme fraction n/m de deux entiers naturels, sachant qu'il y a plusieurs manières de choisir n et m. Ainsi, les classes d'équivalences de $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(3, 2)$ donnent respectivement les nombres rationnels 1, 2 et $3/2$.

3. *(Optionnel)*
   Montrer que si $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$ *et* $(p, q)\mathcal{R}(p', q')$ *alors* $(n\,p, m\,q)\mathcal{R}(n'\,p', m'\,q')$.
   C'est cette propriété qui permet de définir la multiplication sur $\mathbb{Q}$ à partir de la multiplication sur $\mathbb{N}$.