IUT d'Orsay
Département Informatique
Mathématiques

2011-2012
DUT 1A

Interrogation du jeudi 24 novembre 2011 (Sujet D)

Exercice 1. *On considère les matrices A et B :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA lorsque cela est possible :

```
sage : A * B if A.ncols() == B.nrows() else None
sage : B * A if B.ncols() == A.nrows() else None
```

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & -5 \\ 10 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *Soit A la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \sum_{i=0}^{n-1} a^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Initialisation : la formule est valide pour $n = 0, 1, 2, 3$:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2+a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit n un entier et supposons que la formule soit valide :

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \sum_{i=0}^{n-1} a^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} a^n & \sum_{i=0}^{n-1} a^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n a & a^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & \sum_{i=0}^{n} a^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc la formule reste valide pour $n+1$, comme voulu.

2. *Calculer $\sum_{i=0}^{n-1} a^i$ en fonction de a et n :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

3. *En déduire A^n lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Soient $g_1 : E \to F$ et $g_2 : F \to G$ deux fonctions.*

1. *Rappeler les définitions de :*
   (a) *$g_2 \circ g_1$:*
   $g_2 \circ g_1$ est la fonction de E dans G définie par $(g_2 \circ g_1)(x) = g_2(g_1(x))$.

   (b) *g_1 est surjective :*
   g_1 est surjective si $\forall y \in E, \exists x \in E, g_1(x) = y$

2. *Démontrer que si g_1 et g_2 sont injectives alors $g_2 \circ g_1$ l'est aussi.*
   Supposons en effet que g_1 et g_2 sont injectives.
   Soient x et x' dans E tels que $(g_2 \circ g_1)(x) = (g_2 \circ g_1)(x')$, c'est-à-dire :

$$g_2(g_1(x)) = g_2(g_1(x'))\ .$$

   Comme g_2 est injective, on en déduit que $g_1(x) = g_1(x')$.
   Comme g_1 est injective, on en déduit que $x = x'$.
   Conclusion $g_2 \circ g_1$ est injective.

Exercice 4. *Soit $E = \mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples (a,b) d'entiers naturels. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par :* $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ *si* $a+b' = a'+b$.

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

   (a) *$\mathcal{R}$ est **réflexive** : soit (a,b) dans E ; on a $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ car $a+b=a+b$.*

   (b) *$\mathcal{R}$ est **symétrique** : soient (a,b) et (a',b') dans E ; alors on a :*

   $$(a,b)\mathcal{R}(a',b') \iff a+b' = a'+b \iff a'+b = a+b' \iff (a',b')\mathcal{R}(a,b)\,.$$

   (c) *$\mathcal{R}$ est **transitive** : soient (a,b), (a',b') et (a'',b'') dans E tels que $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ et $(a',b')\mathcal{R}(a'',b'')$:*

   $$a+b' = a'+b \qquad \text{et} \qquad a'+b'' = a''+b'\,.$$

   En ajoutant b'' à la première équation et en ajoutant b à la deuxième équation on obtient :

   $$a+b'+b'' = a'+b+b'' = a''+b'+b\,.$$

   En simplifiant par b', on en déduit que :

   $$a+b'' = a''+b\,.$$

   Donc $(a,b)\mathcal{R}(a'',b'')$ comme voulu.

   Conclusion $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. *Donner les classes d'équivalences de* $(0,0)$, $(1,0)$ *et* $(0,1)$ *:*

$$\begin{aligned}
\overline{(0,0)} &= \{(0,0),(1,1),(2,2),\dots\} = \{(k,k), k\in\mathbb{N}\}\\
\overline{(1,0)} &= \{(1,0),(2,1),(3,2),\dots\} = \{(k+1,k), k\in\mathbb{N}\}\\
\overline{(0,1)} &= \{(0,1),(1,2),(2,3),\dots\} = \{(k,k+1), k\in\mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

C'est cette relation d'équivalence qui permet de construire l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs à partir des entiers naturels : chaque entier relatif est décrit implicitement comme différence $a-b$ de deux entiers naturels, sachant qu'il y a plusieurs manières de choisir a et b. Ainsi, les classes d'équivalences de $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ donnent respectivement les entiers relatifs 0, 1 et -1.

3. *(Optionnel)*
   Montrer que si $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ *et* $(c, d)\mathcal{R}(c', d')$ *alors* $(a + c, b + d)\mathcal{R}(a' + c', b' + d')$.
   C'est cette propriété qui permet de définir l'addition sur $\mathbb{Z}$ à partir de l'addition sur $\mathbb{N}$.